ĐAI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2015-2016
MÔN THI: TOÁN (Chuyên)
Thời gian: 150 phút

Bài 1: (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}=2\sqrt{x-x^2}$.

b) Cho các số a và b thỏa mãn điều kiện $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}$. Chứng minh rằng: $-1\le a<0$.

Bài 2: (2,0 điểm).

a) Tìm các số nguyên a, b, c sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+3=0$.

b) Cho m là số nguyên. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+4m=0$ thì cũng tồn tại các số nguyên a', b', c' khác 0 sao cho $a'+b'+c'=0$ và $a'b'+b'c'+c'a'+m=0$.

c) Với k là số nguyên dương, chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+2^k=0$.

Bài 3: (1,0 điểm). Giả sử phương trình $2x^2+2ax+1-b=0$ có 2 nghiệm nguyên (a, b là tham số). Chứng minh rằng $a^2-b^2+2=0$ là số nguyên và không chia hết cho 3.

Bài 4: (3,0 điểm). Cho tam giác ABC (AB < AC) có các góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, F là điểm đối xứng của E qua M.

a) Chứng minh rằng $EB^2=EF.EO$.

b) Gọi D là giao điểm của AE và BC. Chứng minh các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC sao cho P, O, F không thẳng hàng. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua một điểm cố định.

Bài 5: (2,0 điểm). Để khuyến khích phong trào học tập, một trường THCS đã tổ chức 8 đợt thi cho các học sinh. Ở mỗi đợt thi, có đúng 3 học sinh được chọn để trao giải. Sau khi tổ chức xong 8 đợt thi, người ta nhận thấy rằng với hai đợt thi bất kỳ luôn có đúng 1 học sinh được trao giải ở cả hai đợt thi đó. Chứng minh rằng:

a) Có ít nhất một học sinh được trao giải ít nhất bốn lần.

b) Có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

HẾT

ĐAI HỌC QUỐC GIA TP.HCM **ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2015-2016**

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU **MÔN THI: TOÁN (Chuyên)**

Thời gian: 150 phút

GV THĂNG LONG HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}=2\sqrt{x-x^2}$ (1)

Cách 1:

Điều kiện: $\begin{cases}2x-1\ge 0\\1-2x^2\ge 0\\x-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\x^2\le\dfrac{1}{2}\\x(1-x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(1)\Leftrightarrow 2x-1+1-2x^2+2\sqrt{2x-1}.\sqrt{1-2x^2}=4\left(x-x^2\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{1-2x}\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x^2}\Leftrightarrow 2x-1=1-2x^2$

$\Leftrightarrow x^2+x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\text{(nhận)}\\x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\text{(loại)}\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Cách 2:

Ta chứng minh được: $a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$, dấu ''='' xảy ra khi a = b.

Áp dụng bất đẳng trên, ta có:

$\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}\le\sqrt{2\left(2x-1+1-2x^2\right)}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}\le 2\sqrt{x-x^2}$

Dấu ''='' xảy ra khi $2x-1=1-2x^2\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

So với điều kiện $\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ta nhận $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Vậy $S=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) Cho các số a và b thỏa mãn điều kiện $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b-\dfrac{1}{4}}$. Chứng minh rằng: $-1\le a<0$.

Cách 1:

Đặt $u=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}; v=\sqrt[3]{b}; t=\sqrt[3]{a}\Rightarrow u^3=b-\frac{1}{4};\ v^3=b;\ t^3=a\Rightarrow u^3-v^3=-\frac{1}{4}$

Ta có : $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}\Rightarrow t+v=u\Rightarrow u-v=t$

Ta

có $u^3-v^3=-\frac{1}{4}\Rightarrow u^3-v^3<0\Rightarrow u^3<v^3\Rightarrow u<v\Rightarrow u-v<0$ mà $u-v=t$ nên $t<0\Rightarrow\sqrt[3]{a}<0\Rightarrow a<0$

Mặt khác, ta có:

$$-\frac{1}{4}=u^3-v^3=\left(u-v\right)^3+3uv\left(u-v\right)=t^3+3t.uv=t^3+3t\cdot\frac{\left(u+v\right)^2-\left(u-v\right)^2}{4}$$

$$=t^3+3t\cdot\frac{\left(u+v\right)^2-t^2}{4}=\frac{t^3+3t\left(u+v\right)^2}{4}$$

$\Rightarrow -1=t^3+3t\left(u+v\right)^2$ mà $t^3=a$ nên $-1=a+3t\left(u+v\right)^2\Rightarrow a+1=-3t\left(u+v\right)^2\geq 0\left(\text{do } t<0\right)\Rightarrow a\geq -1$

Cách 2:

Ta có: $b-\frac{1}{4}<b\Rightarrow\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}<\sqrt[3]{b}$. Do đó: $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b}=0\Rightarrow a<0$

Mặt khác: $3\left(\sqrt[3]{b}-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Rightarrow\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}\geq\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}-3\left(\sqrt[3]{b}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt[3]{b-3\sqrt[3]{b^2}+3\sqrt[3]{b}-1}$

$=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{b}-1\right)^3}=\sqrt[3]{b}-1$

Do đó: $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{b}\geq\sqrt[3]{b}-1-\sqrt[3]{b}=-1\Rightarrow a\geq -1$

Vậy $-1\leq a<0$

Cách 3:

Ta có: $x^3-y^3=\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$ và $x^2+xy+y^2\geq 0$ nên $x\geq y\Leftrightarrow x^3\geq y^3$

Đặt: $x=\sqrt[3]{a}; y=\sqrt[3]{b}$. Ta có: $x+y=\sqrt[3]{y^3-\frac{1}{4}}$. Suy ra: $x=\sqrt[3]{y^3-\frac{1}{4}}-y<0$

Giả sử: $x<-1$, ta có: $\sqrt[3]{y^3-\frac{1}{4}}=y+x<y-1\Leftrightarrow y^3-\frac{1}{4}<y^3-3y^2+3y-1$

$\Leftrightarrow y^2-y+\frac{1}{4}<0\Leftrightarrow\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<0\left(\text{vô lý}\right)$

Do đó: $x\geq -1\Leftrightarrow a\geq -1$

Vậy $-1\leq a<0$

Bài 2: (2,0 điểm).

a) Tìm các số nguyên a, b, c sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+3=0$.

Cách 1:

Ta có: $a^2+b^2+c^2=\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ca\right)=6\Rightarrow a^2\leq 6$ mà a là số nguyên nên $a\in\left\{-2;-1;0;1;2\right\}$

TH1: a = -2. Thế vào $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+3=0$, ta có:

$\begin{cases}-2+b+c=0\\-2b+bc-2c+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b+2\\-2b+b(-b+2)-2(-b+2)+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b+2\\-b^2+2b-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\c=1\end{cases}$

TH2: **a = -1. Thế vào $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+3=0$, ta có:**

$\begin{cases}-1+b+c=0\\-b+bc-c+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b+1\\-b+b(-b+1)-(-b+1)+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b+1\\(b+1)(2-b)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2\\b=-1\end{cases}$ hay $\begin{cases}c=-1\\b=2\end{cases}$

TH3: **a = 0. Thế vào $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+3=0$, ta có:**

$\begin{cases}b+c=0\\bc+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b\\-b^2+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b\\b=\pm\sqrt{3}\ (\text{loại vì } b\in Z)\end{cases}$

TH4: **a = 1. Thế vào $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+3=0$, ta có:**

$\begin{cases}1+b+c=0\\b+bc+c+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b-1\\b+b(-b-1)+(-b-1)+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b-1\\-b^2-b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-2\\b=1\end{cases}$ hay $\begin{cases}c=1\\b=-2\end{cases}$

TH5**: a = 2. Thế vào $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+3=0$, ta có:**

$\begin{cases}2+b+c=0\\2b+bc+2c+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b-2\\2b+b(-b-2)+2(-b-2)+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b-2\\-b^2-2b-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-1\\b=-1\end{cases}$

Vậy $(a;b;c)\in\{(-2;1;1),(-1;-1;2),(-1;2;-1),(1;1;-2),(1;-2;1),(2;-1;-1)\}$

Cách 2:

Ta có: $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca=-3$.

Do đó: $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=6$.

Do a, b, c có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử: $|a|\ge|b|\ge|c|$. Khi đó: $1<|a|<3$.

Suy ra: $|a|=2\Rightarrow a=2;a=-2$

- **Với a = 2 thì: $\begin{cases}b+c=-2\\b^2+c^2=2\end{cases}\Leftrightarrow b=c=-1\Rightarrow(a,b,c)=(2;-1;-1)$ và các hoán vị.**
- **Với $a=-2$ thì: $\begin{cases}b+c=2\\b^2+c^2=2\end{cases}\Leftrightarrow b=c=1\Rightarrow(a,b,c)=(-2;1;1)$ và các hoán vị.**

b) Cho m là số nguyên. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+4m=0$ thì cũng tồn tại các số nguyên a',b',c' khác 0 sao cho $a'+b'+c'=0$ và $a'b'+b'c'+c'a'+m=0$.

Cách 1:

Ta có: $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=8m$

$\Rightarrow a^2+b^2+(-a-b)^2=8m\Rightarrow a^2+ab+b^2=4m$

Do 4m là số chẵn nên a^2+ab+b^2 là số chẵn $\Rightarrow$ a, b đều chẵn. Ta đặt $a=2a';b=2b'$

Khi đó, ta có:

$(2a')^2+(2a')(2b')+(2b')^2=4m\Leftrightarrow a'^2+a'b'+b'^2=m\Leftrightarrow(a'+b')^2-a'b'=m$

$\Leftrightarrow(a'+b').(a'+b')-a'b'=m$

Chọn $c'=-(a'+b')$, ta có $a'+b'+c'=0$ và $(a'+b').c'-a'b'=m\Leftrightarrow a'b'+b'c'+c'a'+m=0$

Cách 2:

Ta có: $a+b+c=0$ là số chẵn. Xét 2 trường hợp:

TH1: **Trong 3 số a, b, c có hai số lẻ và một số chẵn.**

Không mất tính tổng quát, giả sử a, b lẻ và c chẵn.

Ta có: ab lẻ, bc chẵn, ca chẵn. Do đó: $ab+bc+ca+4m$ là số lẻ. Điều này trái với giả thiết (vì $ab+bc+ca+4m=0$: là số chẵn)

Vậy không xảy ra trường hợp này.

TH2: **Cả ba số a, b, c đều chẵn. Đặt $a=2a';b=2b';c=2c'$ (a’, b’, c’ là các số nguyên khác 0)**

Từ $a+b+c=0$. Ta có: $2a'+2b'+2c'=0 \Leftrightarrow a'+b'+c'=0$

Vì $ab+bc+ca+4m=0$. Ta có: $4a'b'+4b'c'+4c'a'+4m=0 \Leftrightarrow a'b'+b'c'+c'a'+m=0$

c) Với k là số nguyên dương, chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+2^k=0$

Cách 1:

Giả sử tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+2^k=0$

Áp dụng câu b) ta có: a_1,b_1,c_1 là các số nguyên khác 0 sao cho:

$$a_1+b_1+c_1=0;a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1+2^{k-2}=0$$

Tiếp tục áp dụng câu b) và quá trình này tiếp tục mãi, ta sẽ đến có các số nguyên a’, b’, c’ khác 0 thỏa mãn:

$$\begin{cases}a'+b'+c'=0\\a'b'+b'c'+c'a'+1=0\end{cases}\text{hoặc}\begin{cases}a'+b'+c'=0\\a'b'+b'c'+c'a'+2=0\end{cases}$$

Do đó: $a'^2+b'^2+c'^2=2(1)$ hoặc $a'^2+b'^2+c'^2=4(2)$

Vì a’, b’, c’ khác 0 nên (1), (2) không xảy ra.

Vậy không tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+2^k=0$

Cách 2:

- **Với $k=0$ ta có: $a+b+c=0;ab+bc+ac=-1$ thì $a^2+b^2+c^2=2(3)$**

Không có bộ ba số nguyên $a,b,c\neq 0$ thỏa (3)

- **Với $k=1$ thì $a+b+c=0;ab+bc+ca=-2$ khi đó: $a^2+b^2+c^2=4(4)$.**

Giả sử $|a|$ nhỏ nhất khi đó: $1\le a^2<2$ (không có a thỏa). Không tồn tại a, b, c nguyên khác 0 thỏa (4).

- **Với k > 1**
  - **Nếu k chẵn, đặt k = 2n ta có: $a+b+c=0;ab+bc+ca+4^n=0$, theo câu a) tồn tại a_1,b_1,c_1 nguyên thỏa: $a_1+b_1+c_1=0;a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1+4^{n-1}=0$**

  Tương tự sẽ được: a_n,b_n,c_n nguyên thỏa $a_n+b_n+c_n=0;a_nb_n+b_nc_n+a_nc_n=-1$ (vô nghiệm).
  - **Nếu k lẻ đặt $k=2n+1$ ta có: $a+b+c=0;ab+bc+ca+2.4^n=0$, làm tương tự trên ta được:**

  $a_n+b_n+c_n=0;a_nb_n+b_nc_n+a_nc_n=-1$ **(vô nghiệm)**

Vậy không tồn tại các số a, b, c khác 0 thỏa đề bài.

Bài 3: (1,0 điểm). Giả sử phương trình $2x^2+2ax+1-b=0$ có 2 nghiệm nguyên (a, b là tham số). Chứng minh rằng $a^2-b^2+2=0$ là số nguyên và không chia hết cho 3.

$$\Delta'=a^2-2(1-b)\ge 0$$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm nguyên của phương trình đã cho. Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1.x_2 = \dfrac{1-b}{2} \end{cases}$ Do đó: $a^2 - b^2 + 2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - \left(1 - 2x_1x_2\right)^2 + 2$ là số nguyên vì x_1, x_2 là số nguyên.

- Ta có: $m^2\left(m \in Z\right)$ chia cho 3 dư 0 hoặc 1. (*)

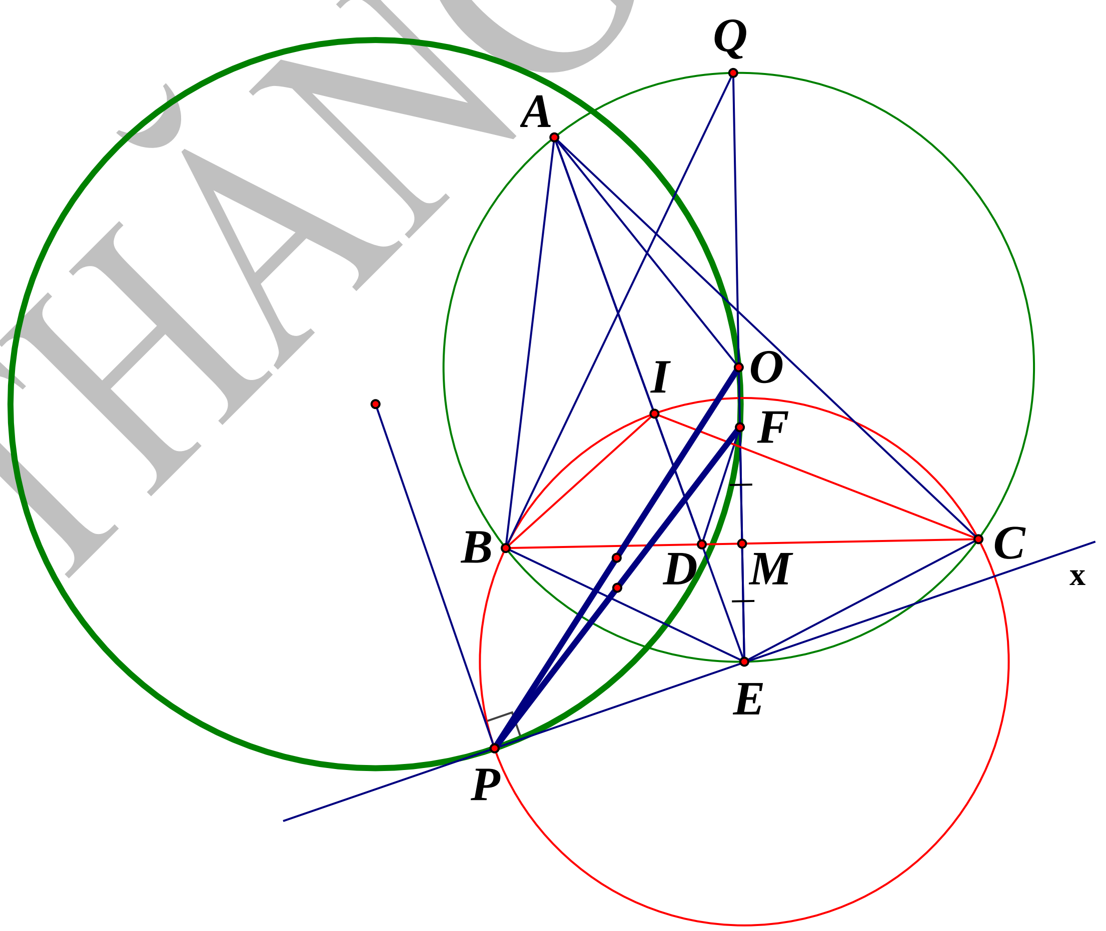
Thật vậy, đặt $m = 3k + r\left(k \in Z, r \in \{0;1;-1\}\right)$

Do đó: $m^2 = \left(3k+r\right)^2 = 3\left(3k^2 + 2kr\right) + r^2$ chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

- Ta có: $a^2 - b^2 + 2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - \left(1 - 2x_1x_2\right)^2 + 2 = \left(x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_1x_2{}^2 + 1\right) + 3\left(x_1x_2 - x_1{}^2x_2{}^2\right)$ (**)
  - Nếu $x_1 \vdots 3$ và $x_2 \vdots 3$ thì $\left(x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_1{}^2x_2{}^2\right) \vdots 3\left(\text{theo}(*)\right) \Rightarrow (**)$ chia 3 dư 1 . Do đó: $\left(a^2 - b^2 + 2\right)$ không chia hết cho 3.
  - Nếu $x_1 \vdots 3$ và x_2 không chia hết cho 3 hoặc x_1 không chia hết cho 3 và $x_2 \not\vdots 3$ thì $\left(x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_1{}^2x_2{}^2\right)$ chia cho 3 dư 1 (theo (*)) $\Rightarrow (**)$ chia 3 dư 2. Do đó: $\left(a^2 - b^2 + 2\right)$ không chia hết cho 3.
  - Nếu x_1 không chia hết cho 3 và x_2 không chia hết cho 3 thì $\left(x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_1x_2{}^2\right)$ chia cho 3 dư 1
    (theo (*)) $\Rightarrow (**)$ chia cho 3 dư 2. Do đó: $\left(a^2 - b^2 + 2\right)$ không chia hết cho 3.

Vậy $a^2 - b^2 + 2$ là số nguyên và không chia hết cho 3.

<u>Bài 4:</u> (3,0 điểm). Cho tam giác ABC (AB < AC) có các góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, F là điểm đối xứng của E qua M.



a) Chứng minh rằng $EB^2 = EF.EO$.

Vẽ EQ là đường kính của (O).

Ta có:

$$\begin{cases} O, M, E \text{ thẳng hàng}(OE \perp BC; OM \perp BC) \\ E, M, F \text{ thẳng hàng(gt)} \\ Q, O, E \ (\text{đk } (O)) \end{cases} \Rightarrow Q, O, F, M, E \text{ thẳng hàng.}$$

Ta có: $EB^2 = EM.EQ\left(\Delta EBQ \text{ vuông tại B có đường cao BM}\right)$

$\Rightarrow EB^2 = \dfrac{EF}{2}.2.OF \Rightarrow EB^2 = EF.EO$

b) Gọi D là giao điểm của AE và BC. Chứng minh các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{OAD} = \widehat{OED}\left(\Delta ODE \text{ cân tại O}\right) \\ \widehat{OED} = \widehat{DFM}\left(\text{tính chất đối xứng của E và F qua BC}\right) \end{cases} \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{DFM}$$

$\Rightarrow$ **Tứ giác ADFO nội tiếp (...)** $\Rightarrow A, D, F, O$ **cùng thuộc một đường tròn.**

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC sao cho P, O, F không thẳng hàng. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POE đi qua một điểm cố định.

Vẽ Px là tiếp tuyến của (OEP) tại P.

$\Rightarrow xPF = POF\left(\text{gnt và góc ở tâm cùng chắn PF của (POF)}\right)$ **(1)**

Ta có: $EIB = IAB + IBA\left(\text{góc ngoài của } \Delta ABI\right) = EBC + IBC = IBE$

$\Rightarrow \Delta EIB$ **cân tại E** $\Rightarrow EI = EB = EC \Rightarrow I, B, C \in (E) \Rightarrow$ **E là tâm của (BIC)** $\Rightarrow EP = EB\left(P, B \in (E)\right)$

$\Rightarrow EP^2 = EF.EO\left(EB^2 = EF.EO\right) \Rightarrow \Delta EPF \backsim \Delta EOP\left(c - g - c\right) \Rightarrow \widehat{EPF} = \widehat{POF}$ **(2)**

Từ (1) và (2) $\Rightarrow FPE = EPx \Rightarrow Px \equiv PE$

$\Rightarrow$ **Px đi qua E cố định (do E là tâm của (BIC) cố định do B, I, C cố định)**

$\Rightarrow$ **tiếp tuyến Px của (OFP) đi qua điểm E cố định.**

<u>Bài 5:</u> (2,0 điểm). Để khuyến khích phong trào học tập, một trường THCS đã tổ chức 8 đợt thi cho các học sinh. Ở mỗi đợt thi, có đúng 3 học sinh được chọn để trao giải. Sau khi tổ chức xong 8 đợt thi, người ta nhận thấy rằng với hai đợt thi bất kỳ luôn có đúng 1 học sinh được trao giải ở cả hai đợt thi đó. Chứng minh rằng:

a) Có ít nhất một học sinh được trao giải ít nhất bốn lần.

<u>Cách 1:</u> **Xét đợt thi thứ nhất. Theo đầu bài có đúng 1 học sinh được trao giải trong hai đợt thi bất kì, vì vậy trong 7 đợt thi còn lại, trong ba học sinh được trao giải đợt thi thứ nhất có một học sinh được trao giải ít nhất 3 lần (vì $7:3 = 2$ (dư 1))**

Vậy có một học sinh được trao giải ít nhất bốn lần.

<u>Cách 2:</u>

Giả sử A_1 là tập 3 bạn đạt giải trong đợt thi thứ nhất. Tương tự với $A_2, ..., A_8$

Ta có: $A_1 = \{a, b, c\}$. Vì $A_1 \cap A_i, i = \overline{2,8}$ có đúng một học sinh nên các học sinh a, b, c xuất hiện trong 7 tập $A_2, ..., A_8$ và không có hai bạn nào xuất hiện cùng một tập. Do đó theo nguyên lý

Dirichlet thì có một học sinh thuộc ít nhất 3 tập trong các tập $A_2,...,A_8$. Khi đó học sinh này có xuất hiện trong ít nhất 4 tập, hay được nhận thưởng ít nhất 4 lần.

b) Có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

Cách 1:

Từ câu a) giả sử a là học sinh được trao giải ở bốn đợt thi. Xét một đợt thi bất kì trong bốn đợt thi còn lại. Vì có đúng một học sinh được trao giải trong hai đợt thi bất kì. Do vậy đợt thi này, bốn đợt thi mỗi đọt có 1 học sinh được trao giải. Như vậy học sinh đó phải là a (nếu không phải là a thì đợt này có đến 4 học sinh được trao giải). Vì xét đợt thi bất kì nên a được trao giải trong bốn đợt thi còn lại. a được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

Vậy có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

Cách 2:

Theo câu a), có một học sinh a nhận thưởng được ít nhất 4 lần, giả sử là từ lần 1 đến lần 4. Hay a thuộc A_1,A_2,A_3,A_4. Khi đó nếu a không nhận thưởng trong 8 lần, tức là có một lần a không nhận thưởng. Giả sử là lần 8, tức là a không thuộc A_8.

Khi đó : $A_1 \cap A_8$ là một học sinh nên có học sinh $b \neq a$ thuộc A_8, tương tự có học sinh c, d, e lần lượt thuộc A_2,A_3,A_4 cũng thuộc A_8. Hơn nữa b, c, d, e phải phân biệt. Do đó A_8 chứa ít nhất 4 phần tử (vô lý). Vậy có một học sinh thuộc 8 tập hợp, hay nhận thưởng 8 lần. Và không có hai học sinh nào cùng nhận thưởng hai lần nên chỉ có đúng một học sinh thỏa.

HẾT